國小五年級學童的估算歷程與估算策略之研究

Yea-Ling Tsao, Minnsota State Univeristy Mankato
Ting-Rung Pan, Second Hsin Lang Elementary School, Taipei

Abstract

This study investigated what level of computational estimation performance was possessed by fifth graders in Taiwan and what cognitive processes were used by selected fifth graders on basic types of problems involving computational estimation. Two hundred thirty-five Grade-5 Students from four elementary schools in Taipei City were selected for the "Computational Estimation Test." Based on 28 items of the Computational Estimation Test, the average number of items correctly answered by students was 16.37, the percent of correct responses was 58.48%, and the overall performance was moderate. The interview data with the fifteen students indicated that these focal participants employed the processes of reformulation, translation, compensation and they can use the various computational estimation strategies, and the so called "rounding strategy" was used the most frequently. The other strategies include *front-end strategy, adjusting with front-end estimation, compatible number strategy, special numbers strategy, rounding two numbers*, and *rounding one number*.

摘要

本研究主要目的在了解國小五年級學童估算能力表現，及學童估算的解題歷程與所使用之估算策略。在估算能力測驗整份試題 28 題中，學童平均答對題數為 16.37，答對率為 58.48%。若將整份試題依數字型式分為整數、分數、小數題來看：可以發現學童在「整數」題的表現是較好的，答對率有 63.44%；在「小數」部分的答對率為 54.30%，表現稍差；而「分數」部分的表現是較差的，答對率是 46.63%。研究結果發現所有的個案學童都有重組的歷程發生，15 位個案學童皆可以在不改變算式結構的原則下，將算式中的數字改變為較易心算的過程；有 8 位學童有轉譯的歷程產生，可知大約五成的學童會改變估算問題的算式結構，將之變成較易心算的型式；另外，有 5 位學童有整補的歷程產生。研究結果發現學童會視題目所需並依照自己的能力使用多樣的解題策略，最常使用的估算策略是四捨五入法。此外也發現學童有使用取 0 或 5 或 10；50 或 100

的倍數策略、及利用參考數等策略；但仍有不少比例的學童會使用非估算策略。

研究動機

估算的應用在日常生活當中是非常廣泛的，舉凡金錢管理、時間及幾何學等的概念在生活中所扮演的角色遠比計算能力重要的多，因此要求學童將其所學知識與生活真實情境相結合，那麼發展估算能力對數學教育來說是當前的課題。估算在整個解題過程中扮演了一個極重要的角色，因為估算可以幫助人們在沒有任何計算工具下去思考問題，並可提供學生進行計算過程時，有效的監控自己的思考過程（Rubenstein，1985、Trafton，1986、Tsao，2009）。

估算在台灣過去數學教學中，是較被忽略的課題，在聯考制度引導教學的情況下，為了獲得較高的數學成績，向來都強調筆算的技能、速度和唯一的答案，總是重視算則的機械式演練與計算技能的熟練，而缺乏思考、邏輯推理的培養(楊德清，2000，2001、Yang，2005、Tsao，2009），使得多數的學童在面對數字運算時，往往只依賴紙筆精確地計算，而沒有辦法利用估算或是合理性的判斷進而求出解答。但隨著教育不斷地改革，目前課程標準也越來越重視估算這部分領域，認為估算學習對於學生的數感（number sense）以及數學思維有相當程度的幫助。因此，在台灣新頒定九年一貫數學領域課程（2003）五大主題之一「數與量」中之「估算」強調能結合具體情境進行估算、並能進行估計，能結合具體情境進行估算並解釋估算的過程。可見數學教育界已逐漸重視估算能力的培養、估算教學亦成為改革的重要方向之一。

綜上所述，可以清楚瞭解到估算的應用在日常生活當中佔有重要的角色，因此掌握這些基本能力是相當重要的，目前估算教學已受到許多先進國家的重視，並強調其重要性，而台灣數學課程雖已包含了估算的內涵，但是要如何將學校教學中所含的估算概念融入生活當中與其作統整連結，值得進一步地探討。基於此，本研究希望能了解目前學童估算能力及估算解題之歷程與所估算策略之表現，藉此期許能帶給教師們相關資訊以引發適當之估算教學。

研究問題

1.國小五年級學童的估算能力表現情形為何？

2.國小五年級學童估算解題之歷程與及常使用估算策略為何？

文獻探討

估算的意義與估算的重要性

許多學者提出估算是綜合多種能力、技巧與數概念的運算，並結合心算快速地計算出合理性的答案。Reys & Bestgen（1981）認為估算是心算、數的概念與各種計算技巧的綜合運用，是以心算的方式快速的算出答案，由此種過程獲得之答案具有相對之合理性。估算是個人對數字及運算的一般性了解，即以彈性的方式運用所理解的數學知識進行數學判斷，並發展有用的策略以處理面對數學情境的一種能力及傾向（楊德清，1997、Tsao，2009）。

估算是在計算問題時得到近似（rough）答案的內在運思，當精算（precise computation）不需要或不可能時，就需要估算這種能力來求出一個合理的猜測答案，

它能使我們去判斷一個經由計算機所得到答案的合理性(Siegel等人,1982)。而 Patrick & Mireille（2002）提出估算是面對一個計算問題時，在實際算出正確答案之前發現一個近似的答案。估算為推論數字運算式的近似結果，自開始到結束都是呈現數字的狀態（梁崇惠，1993）。

不少學者也提出估算的過程首先是先將要計算的數值取概數後，再計算這些概數，最後計算的結果即為估算值；而這些近似值概數的選取，大都以10的倍數為主(Schon, Blume & Hart，1987）。Sowder（1992）則指出估算是一項複雜的技巧，包含兩種成分─從精確的計算改變成概數，以及對概數作心理的運算；即估算是一種解題型態，指的是透過某種心算方式先找出原數的近似值，再求出結果的解題方式。Hogan 與 Brezinski (2003）對 53 名在校大學生進行了五種能力的測試：數能力，數量推理，計算估算，測量估算，數量估算。結果發現計算估算可以包含在更一般的數學能力之下，它不是一種獨立的單一數學技能，而是一般的數學能力的一個組成部分； 數量估算和測量估算形成了一種獨特的估算技能，從計算估算和一般的數學能力中分離出來，而且這種分離是相當完全的。計算估算能力的發展可能在於與計算熟練程度和計算系統概念發展的結合。

綜合以上國內外學者對估算的定義及看法，我們了解到估算是一項複雜的技能，是綜合多種能力、技巧與數概念的一種運算，它涉及兩個層面，一是將精確的數字簡化為概略的數字後，再將這些概數結合心算處理快速地計算出合理性答案的解題方式。因此研究者將估算視為不藉由任何外在的計算工具，純粹在心中進行粗略的運算而得到的合

理性答案。

Reys 等人（1982）、Reys（1985）以及 Sowder（1992）則認為估算和數學思考有高度相關性。一位好的估算者在數學思考方面，應有以下的能力：

(1) 面對問題，能預測何種類型的答案是適當的。

(2) 能變通性的使用不同形式的數字。

(3) 能選擇適當的策略。

(4) 了解多種答案存在的可能性，並能使用不同的解題策略。

(5) 能審查結果的合理性。

而黃靖淑（2002）提及好的估算者能對基本情境、位值和算術的特性有所掌握，擅長心算，有自信且能容忍誤差。因此可使用多種策略，理解估算的有效性及獲得技巧是估算的重要成分。

就國內數學課程現況來看，估算的相關課程所佔的比例有逐漸增多的趨勢，顯示我國的數學教育逐漸重視估算能力的養成。在現今的社會中，基礎的計算能力仍有其重要性，但為了因應計算方式的逐漸改變，具有估算能力也是必備的。估算在數感能力的提升及生活的應用上，都有極大的功用，因此，估算能力的養成是極為重要的。

估算歷程

Reys 等人（1982）利用 ACE（The Assessing Computational Estimation Test）晤談 59 位優良估算者，分析發現其估算認知有三種主要的歷程：

重組（Reformulation）

在算式不變的情況下，將算式中的數字改變為較易心算的結構。例如：估算「210＋92＝？」，將題目化為較易心算的 200＋100。四捨五入只是其中一個方法；此外，也可用「較好的數」，如：73÷9≒72÷9≒8，或是用「相當的數」，例如：$30\% ≒ \frac{1}{3}$。

轉譯（Translation）

改變估算問題的算式結構，變成較易心算的型式或熟悉的公式。例如：估算「2042＋1928＝？」時，可把算式看成 2000＋2000 變成 2000×2＝4000。或是（347×6）÷43≒（350×6）÷42≒350×（$\frac{6}{42}$）≒350×$\frac{1}{7}$≒50。

整補（Compensation）

在重組或轉譯之際，適度的調整數字大小，彌補估算之誤差，使估算的答案更合理更接近正確值；或將結果補上「多於」、「少於」、「不多於」、「不少於」等補充的估計語詞。可分為兩種型式：一是在計算中整補，如：估算「2124＋1987＋2012＋1736＝？」時，將 2124、1987、2012 都看成約 2000，而把 1736 看成 1700，則答案變成 7700，這個結果會比全部看成 2000 所得的結果 8000 更接近正確值。另一是在計算後整補，如處理「1000÷26＝？」可看成 1000÷25＝40，但除數 26 比 25 大，所以用 26 為除數的商會比用 25 為除數的商略小，故可將答案調整成 39，所得的答案會更接近正確值（引自孟憲騰，1997）。

估算策略

研究者整理學者們研究發現之估算策略，其內容敘述如下：

1. 首位法（Front-end strategy）。取數值之首位來簡化數值，通常會視情況將各數取頭

（或去尾），並做適當的調整再心算。例如：估算「2345÷25＝」，先取 234 估計商的第一個（十位）數值。（Reys，1982、林彩鳳，1995、支毅君，1996、Tsao，2009）

2. 改良式首位法（Adjusting with front-end estimation）。比首位法更靈活，它是將首位和其他部份分開處理，再做結合運算，使估算值更接近正確值。（Reys，1982、林彩鳳，1995、孟憲騰，1997、Tsao，2009）
3. 叢集策略（Clustering strategy）。先觀察算式中的數值接近何數值（估計平均值或較佳數值），再加以運算。（Reys，1982、孟憲騰，1997、Tsao，2009）
4. 四捨五入法（Rounding strategy）。將原數值經四捨五入後，產生較易計算的值，再運算求出估算值。通常會在調整算式的過程中使用，是一個好的策略，因為調整時會高估其中一數低估另外一數。（Reys，1982、林彩鳳，1995、Tsao，2009）
5. 相容數字策略（Compatible number strategy）。選擇算式中的數字將原式處理成較易計算的型式。（Reys，1982、林彩鳳，1995、孟憲騰，1997、Tsao，2009）
6. 利用特殊數字（0，1，5，10，100，$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}$等）（Special numbers strategy）。每個人處理數字型式的習慣不同，因此會作各種數值型式間之轉換，以利運算。（Reys，1982、支毅君，1996、孟憲騰，1997、Tsao，2009）
7. 使用分數（Use of fractions）。將問題中的數字看成分數的形式來處理，但不改變原問題的結構。（Levine，1982、Reys，1982、Dowker，1992、Tsao，2009）
8. 使用已知或較理想的數（Using known,or “nicer”, numbers）。將算式以較熟悉或以

熟知結果的形式作比對，利用該熟知結果的形式為依據做估算，不必再執行繁瑣的計算。（Levine，1982、Reys，1982、Dowker，1992、Tsao，2009）

9. 捨入兩個數（Rounding two numbers）。在乘法問題中將兩數皆捨入，使答案成為十的非零乘冪。（Levine，1982、Dowker，1992）

10. 捨入一個數（Rounding one number）。捨入問題中的其中一數，另一數不作改變，使問題更為容易估算。（Levine，1982、Dowker，1992、Tsao，2009）

11. 因式化（Factorization）。將問題中的數字作因數分解，或同時除以某個公因數，而簡化原問題的數字，以便處理。（Reys，1982、Dowker，1992）

12. 前位演算法（Proceeding algorithmically）。利用標準演算法大約地計算出估算值。（Levine，1982、Reys，1982）

13. 分配律（Distributivity）。利用 a×（b＋c）= ab＋ac 或（a＋b）÷ c =（a÷b）＋（b÷c）的分配律規則處理問題中的數字運算。（Schoen，1981、Reys，1982、Dowker，1992）

其他還有「取 5 為近似值」: 將接近 5 的數值取近似值為 5，接近 0 的數值取近似值為 0，接近 10 的數值取近似值為 10（林彩鳳，1995）;「心算法」: 直接心算出答案或將心算所得之答案改為估算答案等估算策略（支毅君，1996、孟憲騰，1997、Tsao，2009）。

估算相關研究

Sowder（1984）曾經研究美國六~九年級的學生，接受十二題 NAEP 的測驗，並

描述其使用估算的策略。研究結果發現：學生很難接受無紙筆的計算方式，且不了解估算是什麼，認為估算就是猜答案。這可能源於學生長期習慣於強調正確答案的結果。Reys（1991）等人研究日本與美國五、六年級學童的估算能力，結果發現日本學童的計算能力比美國學童的計算能力強，但是兩國同年齡學童估算表現與策略卻差不多，因此推論估算技能並不會伴隨紙筆計算的熟練而增進，估算技能並不需要從傳統紙筆計算發展中進展估算能力的因素，如數的靈活運用、能包容誤差、使用多樣化的策略及調整估算值的技巧。Sowder & Wheeler（1989）研究二、四、六、八、十年級學童的估算技能與概念，以購物的情境問題來看學童的估算表現。其研究結果發現答對率有隨著年齡遞增而升高的趨勢，六年級以下的學童較少具有估算的技能。並發現學童最常用「捨入」的方式來求數的近似值。隨著年齡遞增，先計算再將結果捨入成為估算值的學童有增加的情形，但各年齡層的學童採先捨入求出近似值再做估算的學童，沒有太大的差異。

支毅君（1993，1996）從事估算之研究，其中包括我國國小學童估算概念之發展及教師估算教學。研究發現：多數學童在計算過程中極少去發現不合理現象的存在，且使用估算的意願，似乎與習慣有關。其次，估算能力可分成下列層次：（１）瞭解「估算」的意義及名詞。（２）知道何時可以使用估算來解題。（３）能夠得到合理的估算值。（４）使用適當的估算策略。（５）依數值的特色使用不同的估算策略。（６）能判斷何者是最好的估算策略。林彩鳳（1995）探討國小四、六年級學童的估算能力、常用的估算策略以及發展估算能力所需的數學概念及技巧。研究發現：（１）六年級學童的估算能力優於四年級學童的估算能力。（２）四、六年級學童估算策略包括：「四捨五入法」、「無條件

捨去法」、「取 5 為近似值」、「相容數字法」、「合 10 計算法」、「改良首位法」以及「大略心算」。

而 Hanson 和 Hogan(2000)在估算策略的研究中，運用「放聲思考」(think-aloud) 的訪談方式，訪談45位大學生，並分析23種大學生使用的估算策略，和Reys等人(1982) 所歸納的三種主要估算策略做一比較，將0.5當作50%、把32當作0.67來估計答案符合Reys提出的「再形成」策略，在這個研究中也發現：即使大學生能正確地估算出整數的加減這些題目，但對於小數的乘除及分數的減法等題目的估算仍表現得不理想；因此，兩份研究揭示學生乘法、除法的估算能力不足，仍有待加強。

吳心馨、楊德清 (2006) 在比較國一學生面對「情境」與「純數字運算」時使用估算策略之差異性，並探討學生回答估算問題時所使用之估算策略。結果顯示學生較習慣使用傳統算則的方式解題，少用估算策略解題。研究結果也顯示在整體表現及「轉化」題型之情境與純數字題的估算表現達顯著差異，即純數字題的表現優於情境題。此外，學生常用的估算策略包含「再形成」、「轉化」、「補償調整」三大類。

研究方法

研究設計

首先選取位於台北市的 4 所公立小學,每所小學隨機選取兩個班級的國小五年級學童以「估算能力測驗試題」進行測驗，依估算測驗試題答對率的高低，將學童分為高（前 27%）、中（中間 46%）、低（後 27%）程度，各選取 5 位學童，並依據學童估算能力

測驗試題答題情況，選取答題率較低及較具代表性的試題，訪談個案學童分析其解題之估算歷程與估算策略。

研究對象

本研究接受「估算能力測驗試題」測驗的學生有效樣本人數總計 235 人，依估算測驗試題答對率的高低，選取高、中、低程度各 5 位學童，進行個案訪談，分析學童解題時所使用估算歷程與估算策略。

學童估算能力測驗試題

學童估算能力測驗試題，皆為四選一的單選題，試題包含整數、分數與小數題型，施測試題共 28 題，試題分類情形如表 1。

表 1 估算能力測驗試題之分類

題型	題號	題數
整數	3、4、5、7、10、12、14、16、17、18、19、26、27、28	17
分數	1、2、9、11、15	5
小數	6、8、13、20、21、22	6

許多估算的相關研究，多半以時間為壓力來迫使受測者在時間限制之下，放棄平日習慣的計算方式而使用估算。研究者採用電腦輔助以 power point 的方式計時呈現，讓學童在時間壓力與無法使用紙筆計算的限制下作答，依試題內容之長短繁簡、難易程度，並透過與具有教學經驗之教師討論建議之下，設定每題不同的答題時限。最後透過預試時學生的作答速度與答題情況對時間限制稍作調整，作答總時間約 20 分鐘。學童

估算能力測驗試題之內部一致性信度係數為（Cronbach`s α=.7604）。效度方面，本研究在編製試題時，參酌相關研究文獻、國小教材資料分析及實際教學者建議，使每道試題均符合研究之目的。在編製過程中參考各方意見，除了專家教授、也與現職國小教師進行討論修正，故本研究工具具有專家效度。

研究結果與討論

學童的估算能力表現情形

本研究接受測驗的學生有效樣本人數總計235人，以筆試測驗成績前27%之學生共63人為高分組，測驗成績後 27%之學生共63人為低分組，其餘109人為中分組。在整份試題共計28題中，學童平均答對題數為16.37，答對率為58.48%，整體表現為中上程度，與林彩鳳（1995）對國小四、六年級學童所做的估算測驗結果類似，其研究結果發現在總分為48分的估算能力測驗中，學童的平均分數為25.11，表現也是中上程度，顯見學童的估算能力表現普通且並沒有特別出色，仍需努力。將測驗各試題的逐題答對率整理如表2，結果發現如下：

學童在「整數」試題方面的全體答對率為63.44%，與之相比，其中高分組答對率為84.95%，表現良好；中分組答對率為65.87%，表現稍好；低分組答對率為40.35%，表現較差。此部分與全體答對率63.44%相比較低的有第4、7、10、24、28題；第24、28題答對率較低，分別只有32.63%、49.74%，可以發現學童在估算的時候，多會自行判定適合的數字以利計算，卻沒有在獲得結果的同時判斷答案的合理性與適切性；而在第4題答對率為51.05%中，可以發現學童對於有多餘資訊需要自行選取數值以做估算的

表 2 學童估算測驗試題之逐題答對率（單位：%）

數字形式	題號	H 答對率	H 小計	M 答對率	M 小計	L 答對率	L 小計	全體 答對率	全體 小計
整數	3	78.85	84.95	65.43	65.87	45.61	40.35	63.16	63.44
	4	76.92		50.62		28.07		51.05	
	5	90.38		60.49		42.11		63.16	
	7	76.92		54.32		35.09		54.74	
	10	73.08		55.56		36.84		54.74	
	12	84.62		61.73		42.11		62.11	
	14	96.15		88.89		50.88		79.47	
	16	82.69		65.43		40.35		62.63	
	17	98.08		86.42		45.61		77.37	
	18	86.54		65.43		35.09		62.11	
	19	96.15		77.78		49.12		74.21	
	23	86.54		67.9		31.58		62.11	
	24	57.69		27.16		17.54		32.63	
	25	96.15		75.31		57.89		75.79	
	26	98.08		92.59		61.4		84.74	
	27	92.31		70.37		45.61		68.95	
	28	73.08		54.32		21.05		49.47	
分數	1	78.85	62.31	82.72	45.43	70.18	34.04	77.89	46.63
	2	57.69		45.68		49.12		50.00	
	9	38.46		23.46		14.04		24.74	
	11	76.92		51.85		28.07		51.58	
	15	59.62		23.46		8.77		28.95	
小數	6	78.85	76.28	65.43	55.35	45.61	32.75	63.16	54.30
	8	84.62		55.56		36.84		57.89	
	13	63.46		40.74		22.81		41.58	
	20	78.85		59.26		26.32		54.74	
	21	61.54		32.10		14.04		34.74	
	22	90.38		79.01		50.88		73.68	
分組整體答對率		79.05		59.96		37.59		58.48	

試題表現稍差；從第7、10題的試題答對率，分別為54.74%、54.74%，也可發現學童在面對運算為除法的問題這部分表現稍差，較會產生要以長除法紙筆精算的想法。

學童在「分數」試題方面的全體答對率為46.63%，與之相比，其中高分組答對率為62.31%，表現良好；中分組答對率為45.43%，表現稍差；低分組答對率為34.04%，表現較差。此部分低於全體答對率46.63%的有第9題（答對率為24.74%）與第15題（答對率為28.95%），可以發現學童對於分數的乘法運算較不熟悉，受到教學內容的影響，必須以數學算則精算的方式進行精算，無法以估算的方式獲得估計值。

學童在「小數」試題方面的全體答對率為54.30%，與之相比，其中高分組答對率為76.28%，表現良好；中分組答對率為55.35%，表現稍好；低分組答對率為32.75%，表現較差。此部分低於全體答對率54.30%的有第13題(答對率為41.58%)與第21題(答對率為34.74%)，第13題可以發現學童不擅長小數除法的運算，對於不熟悉的整數除以小數試題，無法掌握數字間的關係，容易產生要以長除法來計算的想法；第21題可以發現學童會受到小數點後位數多寡的影響而產生混淆，因此較容易受到影響而無法以估計來決定適當的數值進行估算，造成答案錯誤。

由各分組整體答對率來看，與全體答對率 58.48%相比，高分組學童的整體答對率為 79.05%，表現良好；中分組學童的整體答對率為 59.96%，表現稍佳；而低分組學童的整體答對率為 37.59%，表現較差。

綜合上述可知，國小五年級學童在估算測驗的表現普通，依測驗分類的優劣依序為「整數」、「小數」、「分數」；事實上，現今課程編排內容中，估算問題都是以整數

為主，以至於學童最熟悉的是整數部分，因此表現會比較好，而有數值表徵間之轉換的問題對學童較有困難度，且在面對分數四則運算時，往往會受到紙筆計算的影響，需要使用算則的方式以獲得答案，或許與接觸分數及分數四則運算的時間不長有關，導致無法靈活的思考而受限，沒辦法在心中進行粗略的運算。

個案學童解題之估算歷程與估算策略

依據學童估算測驗試題作答表現情形，將學童分為高（前 27%）、中（中間 46%）、低（後 27%）程度，各選取 5 位學童，並依據學童答題情況，選取答題率較低及較具代表性的試題，訪談個案學童解題之估算歷程與估算策略。訪談試題為估算測驗試題中的第 2、3、4、5、7、8、10、13、15、16、18、20、21、22、23、24、28 題，共計 17 題，在訪談過程中，每位個案學童皆對這 17 題訪談題目做解題的敘述。成績由高至低編成代號 H1、H2、H3、H4、H5、M1、M2、M3、M4、M5、L1、L2、L3、L4、L5。其中，H1、H2、H3、H4、H5 表示為高分組的學童；M1、M2、M3、M4、M5 表示中分組的學童；L1、L2、L3、L4、L5 表示低分組的學童。

估算歷程

個案學童其估算歷程之情形

估算是一項複雜的技巧，即先對需要計算的數值取概數，然後再對這些概數加以運算。包含三個主要歷程：重組、轉譯與整補。由表 3 個案學童之估算歷程一覽表可以發現所有的個案學童都有重組的估算歷程發生，每位個案學童皆可以在不改變算式結構的原則下，將算式中的數字改變為較易心算的過程，事實上，重組的歷程是較容易發生

的，大部分受試者都會以不改變算式結構，而改變原式的數值將它化為較容易心算的方式為原則，例如用四捨五入、利用特殊數字、相容數字等的策略來改變數值，這些方法都可以用來簡化運算，使其快速地獲得估計值，因此發生的頻率是較普遍的情形。

表 3 個案學童之估算歷程一覽表

學童／歷程	H1	H2	H3	H4	H5	M1	M2	M3	M4	M5	L1	L2	L3	L4	L5
重組	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
轉譯		✓	✓					✓	✓	✓		✓	✓		✓
整補	✓		✓	✓			✓					✓			

在轉譯的估算歷程當中，可以發現有8位學童有此歷程產生，即會改變估算問題的算式結構，將之變成較易心算的型式。其中高分組學童有2位，中分組學童有3位，低分組學童也有3位，這部分發生的情形為學童會利用分配律的思考模式來解題，例如將 325×19 視為 $325\times(10+9)=325\times10+325\times9\fallingdotseq325\times10+325\times10=3250+3250=6500$ 的想法。或是改變整數乘以分數問題的算式結構，例如將 $19\times\frac{18}{35}$ 轉換為 $19\times\frac{1}{2}$，即 $19\div2$；亦或將原式 $19\times\frac{18}{35}$ 改變結構成為 $19\times18\div35$，再對各數字取概數求出估算值。

在整補的估算歷程當中，可以發現有5位學童有此歷程產生，高分組學童有3位，中分組學童有1位，低分組學童也有1位，高分組學童的人數是較其他分組為多，學者們也認為補償策略是專家特性之一。在梁崇惠（1993）的職前教師研究當中也發現：大多數的受訪者均未對估算值作補償調整，雖然有能力去比較估算值與實際值的大小，但卻

很少考慮之間的誤差，與本研究的結果相類似，在訪談的15位學童中，只有5位學童能夠發現估算過程中可能產生的誤差，因而採取補償策略，多數學童都表示估算出來的結果是多少就是多少，跟精確答案有差距沒有關係，並不會去考慮誤差及合理性的問題，也不會調整估算值使其更接近實際值，顯示此特性仍是大多數受試者所欠缺的。

個案學童之估算歷程:

根據訪談結果歸納出個案學童對於估算認知之三種主要歷程：

（1）重組

訪談過程中發現每位個案學童都有重組的歷程發生，即在算式不變的情況下，將算式中的數字改變為較易心算的結構，即估算歷程中的「重組」。例如：四捨五入、使用較理想的數或是轉變數值形式以利用特殊數字等。像第18題學童H1就是利用數與數間的倍數關係，以2500除以25快速地心算出估計值100，將數字化為適當且容易的數值來簡化心算過程。

《18》一條長2345公尺的路，工人每天只能修25公尺，大約要幾天才能修築完成？（1）100（2）200（3）300（4）400

【H1訪談】

H1：100 天，因為 2345 大約是 2500，2500 除以 25 大概就是 100。

R：那你為什麼用 2500 來除？

H1：因為有看到後面是除以25，所以才用2500來除比較好除。

R：所以你有看到除數跟被除數間的倍數關係？

H1：對啊！

學童L1指出第3題的想法是將數字改變為較容易運算的方式，所以將222的個位數以及十位數都省略為200，67的個位數也將它省略為60，這麼一來就式子就變得好算許多，只要將200 - 60心算就可以很快地知道估計值是140，此題的做法是利用首位法只取最高位數來作運算，但學童L1在簡化運算之後不會有調整誤差的動作。

《3》小宇今天必須摺好222隻紙鶴，下午五點時，他發現只要再摺67隻就完成任務了，請問小宇大約摺了多少隻紙鶴？（1）100（2）150（3）200（4）250

【L1訪談】

L1：222減掉67，這樣我就快速算了，因為不夠減，一定要借10，可是222比250（選項四）小，所以就選200。

R：直接就選了！你知道是222減掉67，算出的答案大概是多少呢？

L1：那就150啊！我把67的7去掉變0，所以是60，222又變200，200減掉60不是140嘛！最接近150。

R：那為什麼把67的7去掉變0？

L1：因為這樣算比較快。

R：那222為什麼看成200呢？

L1：因為222的十位數也有數字，所以就把個位數跟十位數兩個都去掉變00，所以就是200。

R：所以都是看最高位數的下一個位數嗎？

L1：對啊！不然最大的位數去掉就變成0就沒有啦！

R：你把一些數字去掉不是會有點差距，會去想它答案有沒有可能會差很多？

L1：(搖頭)就好算，算出來就選答案了。

學童 H2 指出第 10 題的想法首先是將數字四捨五入後簡化運算，研究者在強調其他選項的可能性以及使用估算的方式後，學童 H2 可以利用已知的數學運算 $25\times4=100$ 來對照 1000 除以 26 可以估算成 1000 除以 25，而很快地獲得約略值為 40。

《10》1000÷26的答案最接近？(1)40(2)50(3)60(4)70

【H2訪談】

H2：1000除以30，選一，因為算出來答案是30，最接近40囉！

R：那如果選項有30呢？

H2：因為我除起來是35以上，直接用1000除以26。

R：那現在是估算啊！

H2：除以25，答案是40。

R：怎麼很快知道的呢？

H2：因為 25 乘以 4 就是 100 呀！

(2)轉譯

從訪談的結果發現有些學童會改變估算問題的算式結構，將之變成較易心算的型式或熟悉的公式，即估算歷程中的「轉譯」。例如學童H2在第15題中，發現18大約是35

的一半，視$\frac{18}{35}$大約為$\frac{1}{2}$，因此將原式$19\times\frac{18}{35}$轉換為$19\times\frac{1}{2}$，即19÷2，而獲得大約是10元的約略值。而學童M5實際上是將原式$19\times\frac{18}{35}$改變結構成為19×18÷35，再將數字19與18皆改變為較接近其值的數字20，以20×20簡化算出400，再去除以35或將35改變為更方便計算的40，訪談結果發現此題共有5位學童（M4、M5、L2、L3、L5）是利用此方式來作答的。

《15》鹽巴每一公斤賣19元，媽媽買了$\frac{18}{35}$公斤，大概要準備多少錢才夠？ （1）10（2）20（3）30（4）40

【H2訪談】

H2：選一，因為是18大約是35的一半，一公斤是19塊，除以2大約是10塊。

【M5訪談】

M5：19乘以18/35，把18乘以19然後再除以35，算成比較接近的整數再用除法。

R：那怎麼找接近的數？

M5：18跟19都接近20，所以看成20乘以20，等於400，再除以35，是11點多，差不多10元左右。

R：那你35就不會改變它了嗎？

M5：不會，本身分母是35啊！也可以400除以40更簡單啦，是10。

學童L5指出第5題原式為325×19，接著將原式改變結構，把19分為10與9，先算出325×10的答案是3250，而另一個9又接近10，於是將9視為10再乘一次又得到3250，最後將兩個結果相加得到估計值6500，因此19本漫畫書大約重6000公克。實際上學童L5

就是以分配律的方法來解題的，即325×（10＋9）＝325×10＋325×9≒325×10＋325×10＝3250＋3250＝6500≒6000，從訪談結果發現此題共有5位學童（H3、M3、M4、L2、L5）是利用此方式來作答的。

《5》一本航海王的漫畫重325公克，那麼19本大約多少公克？（1）3000（2）4000（3）5000（4）6000

【L5訪談】

L5：325乘以19，可以19先算裡面的10就好，所以10先乘以325就是3250，可是還剩下一個9要乘，9跟10又很接近，那這個算出來大概也是三千多，全部加起來就是六千多，比較接近6000。

學童M3在第24題的做法也是利用分配律的方式來改變原式的結構，先將15×19以較易心算的方式變為15×20，接著改變結構為（10＋5）×20＝10×20＋5×20＝200＋100＝300，但因為19多算了，因此實際上沒有那麼多座位可容納賓客，所以選280的答案。

《24》音樂演奏廳有15排座位，每一排可以坐19個人，那麼演奏廳最多可以讓幾個人進場而且都有位子坐？（1）280（2）300（3）320（4）340

【M3訪談】

M3：這題我用15乘以19，那就15乘以20，我會20先乘以10是200，再把5乘以20是100，加起來就是300。

R：那題目問說最多可以讓幾個人都有位子坐唷？

M3：那就是第一個答案啊！因為實際上沒有那麼多。

（3）整補

從訪談中的過程也發現，少部分個案學童會意識到估算值與實際值間之誤差的問題，在進行估算的過程中或是估算結束之後，會針對誤差的問題對數字或結果稍作調整，即整補的意義，在重組或轉譯之際，適度的調整數字大小，彌補估算之誤差，使估算的答案更合理更接近正確值。學童H4在第23題的作法中，是在算式不變的情況下，將算式中的數字改變為較易心算的結構，所以把2248改變為2250，而1990視自己的心算能力不作改變，在改變數字的過程中，學童H4因為考慮到若將2248變為2200，對她來說會使差距太大，因此有先對數字作適當的調整。

《23》爸爸到運動用品店想買一雙2248元的球鞋與一套1990元的球衣，最少要帶多少錢在身上？（1）5000（2）4000（3）3000（4）2000

【H4訪談】

H4：選一。2248算2250，1990還是不變，加起來等於4240。

（…………）

R：那你為什麼把2248變2250？

H4：因為我怕變成2200會差太多。

學童M2第3題的做法也是類似的方式，不改變算式的結構，只將數字作較易心算的簡化，對他來說，雖然200與222是比較接近且容易心算的數字，但卻不是以200去加以運算，理由也是因為認為若是用離222太遠的200來作為估算的數字是比較不恰當的。從這兩個例子發現，學童H4與學童M2都是在計算中整補的。

【M2 訪談】

M2：把 222 變成 220，67 變 70，然後兩個相減，看哪個最接近。

（…………）

R：那為什麼是變成 220？

M2：因為這個（222）比較接近 200。

R：那你剛不是用 220 去減？

M2：對啊！

R：那比較接近 200 為什麼你用 220 去減，怎麼不用 200？

M2：因為 200 離 222 太遠了。

《3》小宇今天必須摺好 222 隻紙鶴，下午五點時，他發現只要再摺 67 隻就完成任務了，請問小宇大約摺了多少隻紙鶴？（1）100（2）150（3）200（4）250

第10題學童H3在計算的過程中，也是將數字改變為容易心算的結構，但是在得到結果之後，會顧慮到他將除數26四捨五入想成30去做除法，是把除數變大了一些，因此結果會比原來的答案還要小一些，但事實上應該是要比得到的數還要大一點的，所以稍微調整答案，這則是在計算後再做整補的例子；不論是在計算中整補的，或是在計算後整補的，兩者皆會使所得的答案更接近正確值。

《10》1000÷26的答案最接近？（1）40（2）50（3）60（4）70

【H3訪談】

H3：40吧！把26四捨五入想成30，大概30幾，然後26比30小一點點，所以答案會比除出來的數還要再多一點點，差不多40左右。

學童H4、學童M2在估算過程中，對估算值立即作補償；學童H3則是算出估算的值後再對結果作補償，這些現象都符合Reys等人（1982）、Sowder等人（1989）所提到的補償策略。

估算策略

個案學童使用估算策略之情形

首先先針對個案學童所使用的估算策略情形作一了解，綜合15位個案學童在訪談過程中所出現的估算策略使用次數，可做以下的整理：

表4 個案學童解題策略之次數統計表（N=15）

	H	M	L	小計
《估算策略》				
四捨五入法	22(27.16)	19(23.17)	23(30.67)	64(26.89)
無條件捨去法	1(01.23)	0(00.00)	4(05.33)	5(02.10)
無條件進入法	0(00.00)	2(02.44)	0(00.00)	2(00.84)
首位法	0(00.00)	5(06.10)	2(02.67)	7(02.94)
改良式首位法	4(04.94)	2(02.44)	5(06.67)	11(04.62)
相容數字	8(09.88)	3(03.66)	0(00.00)	11(04.62)
利用特殊數字	10(12.35)	6(07.32)	3(04.00)	19(07.98)

使用已知或較理想的數	5(06.17)	6(07.32)	4(05.33)	15(06.30)
捨入兩個數	5(06.17)	8(09.76)	9(12.00)	22(09.24)
捨入一個數	8(09.88)	7(08.54)	6(08.00)	21(08.82)
分配律	1(01.23)	4(04.88)	2(02.67)	7(02.94)
取 0、5 或 10；50 或 100 的倍數	5(06.17)	0(00.00)	0(00.00)	5(02.10)
利用參考數	1(01.23)	3(03.66)	0(00.00)	4(01.68)
《非估算策略》				
*心算	4(04.94)	2(02.44)	0(00.00)	6(02.52)
*以數學算則精算	7(08.64)	15(18.30)	17(22.66)	39(16.38)
合計	81(100)	82(100.)	75(100.)	238(100)

註：a(b)：a 代表使用次數，b 代表使用某策略所佔的次數百分比。單位：次（％）

由表 4 個案學童解題策略之次數統計表可知，學童會視題目所需並依照自己的能力使用各種估算或非估算策略來解題，以使用的次數百分比高低來討論，可以發現學童最常使用的策略是四捨五入法，約佔 26.89%，而高中低分組的學童在其個別分組當中之四捨五入法使用次數百分比也都是最高的，分別佔 27.16%、23.17%、30.67%，並不會因為程度的高低而大幅的降低使用次數，應與教科書的內容有相關，學童對四捨五入的熟悉度是較高的，當然在使用的頻率也會受影響。與林彩鳳（1995）及吳心馨、楊德清 (2006) 研究所得的結果相符，其發現四捨五入法是最多學生使用的策略。

在捨入兩個數（9.24%）的方法中，可以發現低分組學童的使用次數百分比是最高的，中分組次之，高分組使用次數百分比最低；而捨入一個數法（8.82%）則是高分組學童的使用次數百分比最高，中分組次之，低分組使用次數百分比最低；由統計數字可以發現學童能夠依照自己的計算能力與程度，將數值作捨入一數或兩數的動作，程度低一點的學童傾向將數字皆化為十乘冪的數字更加速估算的進行，而程度高一點的學童傾向認為捨入一個數字後就已經簡化計算且方便運算了；而梁崇惠（1993）發現捨入策略是其職前教師研究中最常使用的策略，可見受試者程度的差異的確會影響策略的使用，其認為受試者傾向於視覺簡化問題中的數字，而捨入策略又與數學課程中學過的四捨五入法較類似，故此法所佔的比重會較高。

在利用特殊數字法(7.98%)中，高分組學童的使用次數百分比最高，中分組次之，低分組使用次數百分比最低，可知高分組學童處理數字型式時，較能察覺數字間的關係，因此會作各種數值型式間之轉換，而低分組的學童此覺察能力較為薄弱。在使用已知或較理想的數（6.3%）中，高中低分組的使用情況還滿平均的，顯見學童能將算式以較熟知結果的形式作比對，利用該熟知結果的形式為依據來做估算，使問題簡單些不必再執行繁瑣的計算。在相容數字法中，15 位個案學童使用的次數共計 11 次，但低分組的學童並沒有使用到此策略，可見低分組學童較不易發現數字間的相互關係；而林彩鳳（1995）研究發現此種策略在四、六年級學童出現的次數極少，六年級 295 人出現 4 次，四年級 331 人只有出現 1 次，是與本研究較不相同的地方。

在改良式首位法（4.62%）與首位法（2.94%）中，可以比較出多數的學童能夠更

進一步的適當調整數值，使估算值更接近正確值，以減少誤差。其餘的策略，如無條件捨去法、無條件進入法、分配律、利用參考數、取 0 或 5 或 10 的倍數等的使用頻率是較低的，研究者認為，雖然無條件捨去法、無條件進入法是學校課程中有教學的，但因為課程中也有的四捨五入法是學童最熟悉接觸最多的方式，所以學童會偏向使用四捨五入法；而分配律、利用參考數、取 0 或 5 或 10 的倍數等的方法是課程中沒有出現過的，不管是教師會額外再補充此概念，或是學童自行建構的知識，都仍需要學童去理解應用，故使用的頻率較低。

而在非估算策略當中，心算佔了全部策略的 2.52%，極少部分學童表示曾學過心算或珠算，因此簡單一點的數字都可以使用此能力獲得答案；以數學算則精算法（16.38%）中，程度較低的學童其使用情況會高於程度較高的學童，此方法是不符合估算意義的，因為學童只是沒有利用紙筆計算，但卻是以一般數學算則的精算方式在腦海中進行運算過程，顯見還是有不少學童受到傳統教育強調筆算的技能的影響，在遇見不熟悉的題目或是例行性的題目時，容易以最機械式演練的算則方式來作答。

綜合上述可知，大部分學童已具有文獻上所提及的估算策略，能夠依照題目所需具有多樣的解題策略，但仍有少數的學童在本測驗當中所使用的估算策略種類稀少，甚至需要利用紙筆精算、數學算則來輔助運算，這個情況同樣發生在支毅君（1996）及 吳心馨、楊德清 (2006) 學童估算概念之研究中，顯示學童在做估算時的靈活度稍嫌不足。

結論

研究結果發現學童有能力去發展具有彈性的解題策略，因此教學者在教學過程中應

避免僅採用少數幾種估算策略，應配合情境利用不同的解題策略以刺激學童靈活思考。九年一貫數學領域課程明確提出對估算的要求，並提出加強估算教學，指出估算是一種數學思考方法，重在培養學生能夠在日常生活中運用估算的相關知識與能力，雖已肯定估算的重要性，但卻發現教科書的內容中只有概算的獨立單元，估算教學應是不斷地在課程中呈現，若僅佔一單元中的某些教學活動，將使學童受限於獨立估算單元內的學習，且現今數學課程教材中以四捨五入法、無條件進入法、無條件捨去法為主，導致學生偏重以例行性估算策略解題，侷限了學童使用估算策略的靈活度，因此課程編排應更強調多樣性估算策略的彈性運用，讓學童在自由的探索估算策略時，能運用對數字的直覺以非例行性的方法，來檢查答案的合理性。建議在課程編排上，應該將估算概念涉及各種數字型式來教學，以及在其他單元配合教材的相關內容，融入估算的元素，如在數學單元進行前可先讓學童對題目進行估算，讓學童熟悉估算並運用估算，有能力去判斷它的合理性，進而提升學童的估算能力。另外建議教學者在進行教學時，可鼓勵學童精算前先對數學題做大略的估計猜測，判斷答案的合理範圍，再進行運算，以檢驗計算答案之合理性。教師可鼓勵學童在日常生活及數學解題中使用估算，多方面的應用估算，使學童對估算有較廣泛的瞭解、增加對答案誤差之容忍度。

參考文獻 (中文部分)

支毅君.(1993).*我國國小學童估算概念之研究（II）*.國科會專題研究報告, NSC82-0111-S-143-001.

支毅君.(1996).我國國小學生估算概念之研究.*台東師院學報,7*,1-51.

吳心馨、楊德清.(2006).*國一學生在情境與純數字問題之估算策略的研究.* 論文發表於中華民國第22屆科學教育學術研討會,台北.

孟憲騰.(1997).*職前教師估算教學策略及估算教學態度之研究.*未出版之碩士論文,國立政治大學教育學類研究所碩士論文,台北.

林彩鳳.(1995).*國小兒童估算能力及估算策略之分析研究.*未出版之碩士論文,國立台中師範學院初等教育研究所碩士論文,台中.

邱兆偉.(1995).「質的研究」的訴求與設計.*教育研究,4,*1-33.

黃靖淑.(2002).*國小中高年級學生數字感發展概況之探討.*未出版之碩士論文，國立台南師範學院國民教育研究所,台南.

教育部.(2003).*九年一貫正式綱要–數學學習領域課程,* 台北.

梁崇惠.(1993).*職前教師估算策略之研究.* 未出版之碩士論文,國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文,彰化.

楊德清.(1997).數學教育中目前大眾所關切之一個主題：數字常識.*科學教育月刊,200,*12-18.

楊德清.(2000).國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法.*科學教育學刊,8*（4）,379-394.

楊德清.(2001).國小高年級學童數字常識評定量表編製之研究.*科學教育學刊,9*（4）,351-374.

楊德清，黃芳玉，林美如.(2002).國小五年級學生數字常識能力之個案研究.*國教天地,*

*150,*16-23.

References

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategy of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 45-55.

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-280.

Hanson, S. A., & Hogan, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(4),* 483–499.

Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 350-359.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology,82,* 281–304.

Reys, B. (1985). Identification and characterization of mental computation algorithms used by seventh and eighth computation exercises. (Doctoral Dissertation Univ. of Missouri-Columbia, 1985). *Dissertation Abstracts International. 46*/11A :3279.

Reys, R. E., & Bestgen, B. J. (1981). Teaching and assessing computational estimation skills. *The Elementary School Journal 82* (2), 117-127.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimation skills.*Journal Reasearch in Mathematics Education, 13,*183-201.

Rubenstein, R. N.(1858). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education,16* (2), 106-119.

Schoen, H. L., Blume, G.. & Hart, E. W. (1987). *Measuring computational estimation processes*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Washington, D. C.（Ed 286929）

Siegel, A. W., Goldsmith, L. T., & Madson, C. R.(1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity *Journal for Researcah in Mathematics Education, 13,* 211-*232.*

Sowder, J., & Wheeler, M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Researcah in Mathematics Education, 20,* 30-146.

Sowder, J. T. (1984). Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Researcah, 6* (77), 332-336.

Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leihardt, R., & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp.1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Trafton, P. R.. (1986). Teaching computational estimation:Establishing an Estimation

Mind-Set. In H.L. Schoen & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation* (pp.16-30). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tsao, Y. L (2009). Teaching computational estimation. In C.H. Yang (Ed.), *Educational Consulting Book: Effective teaching methods* (pp.45-54). Taipei, Taiwan: National Taipei University of Education.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31*, 317-333.